

樊建中, 徐邦联, 张雷洪, 等. Stewart 型六自由度平台正解及工作空间分析[J]. 智能计算机与应用, 2025, 15(2): 77-84.  
DOI:10.20169/j.issn.2095-2163.24051507

# Stewart 型六自由度平台正解及工作空间分析

樊建中<sup>1</sup>, 徐邦联<sup>1,2</sup>, 张雷洪<sup>2</sup>, 张大伟<sup>2</sup>, 王碧涛<sup>1</sup>, 严启予<sup>1</sup>

(1 上海理工大学 出版学院, 上海 200093; 2 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

**摘要:** 本文深入分析了 Stewart 型六自由度平台的运动学正解和工作空间, 采用遗传算法和牛顿迭代法相结合的方法, 有效解决了运动学正解的多解性和复杂性问题, 提高了求解精度与效率。同时, 通过对电动缸长度限制、铰链转动角度限制及电动缸间干涉的综合考虑, 成功绘制了 Stewart 平台的工作空间外包络面。本文不仅为 Stewart 平台的设计和优化提供了理论基础, 也对并联机构控制系统的设计与应用有重要指导意义。

**关键词:** Stewart 平台; 运动学正解; 工作空间; 遗传算法; 牛顿迭代法

中图分类号: TH112

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2025)02-0077-08

## Forward kinematics and workspace analysis of the Stewart-type six-degree-of-freedom platform

FAN Jianzhong<sup>1</sup>, XU Banglian<sup>1,2</sup>, ZHANG Leihong<sup>2</sup>, ZHANG Dawei<sup>2</sup>, WANG Bitao<sup>1</sup>, YAN Qiyu<sup>1</sup>

(1 School of Publishing, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2 School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** This paper conducts a comprehensive analysis of the kinematic solutions and workspace of the Stewart-type six-degree-of-freedom platform. By integrating genetic algorithms with Newton's iterative method, it addresses the complexity and multiple solutions of kinematic analysis, enhancing the precision and speed of the solutions. Additionally, the workspace envelop of the platform is successfully delineated, considering constraints like actuator length, joint rotational angles, and interference between actuators. This study not only lays a theoretical foundation for the design and optimization of Stewart platforms but also offers significant guidance for the design and application of parallel robotic control systems.

**Key words:** Stewart platform; kinematic solutions; workspace; genetic algorithm; Newton's iterative method

## 0 引言

Stewart 平台作为一种六自由度并联机构, 由 V. Eric Gough 于 1954 年提出, 以其高刚性、低惯量和卓越的动态性能在航空模拟、机器人技术、精密加工和医疗手术等领域发挥着重要作用<sup>[1]</sup>。传统的运动学正解求解方法依赖精确的数学模型和复杂的数值方法, 如迭代法或闭式解法, 这些方法对初始估计值要求高, 处理多解性问题时困难, 且在求解速度和稳定性方面有限<sup>[2]</sup>。本研究提出了结合遗传算法和牛顿迭代法的新策略。遗传算法用于全局搜寻, 快速定位最优解附近区域, 之后应用牛顿迭代法进行局部精细搜索, 减少对初始估计值的依赖, 确保算

法的收敛速度和解的精确性<sup>[3]</sup>。

工作空间分析是评估并联机构性能的重要方面, 是机构在不违反任何运动或结构约束的情况下, 能够到达的所有位置和姿态的集合<sup>[4]</sup>。对于 Stewart 平台, 其工作空间的形状和大小直接影响其适用性和效率<sup>[5]</sup>。因此, 本研究对 Stewart 平台的工作空间进行了详细分析, 探讨了空间形状和边界条件对工作空间大小的影响。

## 1 Stewart 平台模型分析

### 1.1 基本结构

Stewart 平台的基本结构如图 1 所示, 由底座 (固定平台) 和移动平台组成, 通过 6 个线性制动器

**基金项目:** 基础科研条件与重大科学仪器设备研发重点专项资金(2023YFF0718103)。

**作者简介:** 樊建中(2000—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 机器人技术; 徐邦联(1988—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向: 重大科学仪器的开发与应用。

**通信作者:** 张雷洪(1981—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向: 计算关联成像技术。Email: lh Zhang@usst.edu.cn。

收稿日期: 2024-05-15

连接<sup>[6]</sup>。该平台具备6个自由度,其中包括3个平移自由度( $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 方向)和3个旋转自由度(绕 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 轴的旋转)。通过独立控制6个致动器的长度,移动平台可以在任意方向进行平移和旋转<sup>[7]</sup>。



图1 Stewart平台结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the Stewart platform structure

## 1.2 建立坐标系

为了实现对 Stewart 平台运动位置和姿态的精确描述,建立了一套坐标系。其中,动坐标系(移动坐标系)被定位于上平台,其原点  $O_1$  与上平台的中心对齐<sup>[8]</sup>;同理,静坐标系(固定坐标系)被定位在下平台,原点  $O$  与下平台的中心一致。图2展现了六自由度平台的运动学模型。

在图2中,标记了以下关键特征:

$B_i$ :六自由度平台中第  $i$  个支杆和下平台之间的铰点;

$A_i$ :六自由度平台中第  $i$  个支杆和上平台之间的铰点;

$R_a$ :六自由度运动平台的所有上铰点所在圆周上的半径;

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

上平台铰点的位置可以使用齐次坐标表示。齐次坐标考虑了旋转和平移,使得坐标变换可以用矩阵乘法来表示。因此,上平台铰点的齐次坐标可以表示为:

$$A = [a_{ij}]_{4 \times 6} \begin{bmatrix} [a_{ij}]_{3 \times 6} \\ [1]_{1 \times 6} \end{bmatrix} \quad (2)$$

当上平台发生姿态变换时,RPY 变换方程可被用于计算铰点在静坐标系中的新坐标。这可以通过变换矩阵  $F$  实现,该矩阵结合了平移和旋转:

$$F = [f_{ij}]_{4 \times 6} = R \times A \quad (3)$$

下平台铰结点在静坐标系中的坐标也可以使用

$R_b$ :六自由度运动平台的所有下铰点所在圆周上的半径;

$O_1$ :六自由度平台的动坐标系原点;

$O$ :六自由度平台的静坐标系原点。

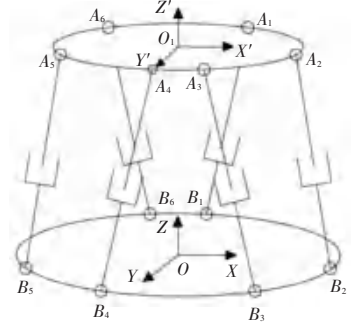


图2 六自由度平台的运动学模型

Fig. 2 Kinematic model of the six-degree-of-freedom platform

基于这些定义,空间坐标系被明确建立。动坐标系由原点  $O_1$  定义的  $O_1 - XYZ$  系统构成,静坐标系则由原点  $O$  定义的  $O - XYZ$  系统构成<sup>[9]</sup>。在平台未发生任何运动的初始状态下,用  $H$  表示平台的初始高度。

## 1.3 坐标变换矩阵

在 Stewart 平台的运动分析中,为了有效地描述这种空间姿态,本研究采用了 RPY (Roll, Pitch, Yaw) 方法。RPY 是一种常用的姿态描述方法,其通过绕固定坐标系的  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴的3个旋转角:滚转角(Roll)、俯仰角(Pitch)、偏航角(Yaw)来定义物体的姿态<sup>[10]</sup>。在固定坐标系中,将其轴定义为  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 。绕这三轴的旋转角分别用符号  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  表示。由这3个角度构成的姿态矩阵可以描述动坐标系相对于静坐标系的最终姿态为:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

齐次坐标表示如下:

$$A = [b_{ij}]_{4 \times 6} \begin{bmatrix} [b_{ij}]_{3 \times 6} \\ [1]_{1 \times 6} \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2 运动学正解分析

### 2.1 基于 GA-Newton 迭代算法的描述

本文提出的正解方法是将遗传算法与牛顿迭代法结合,流程如图3所示。在这个过程中,遗传算法首先用于全局搜索,以快速逼近可能的解区域<sup>[11]</sup>。

遗传算法提供了一个近似解后,就采用牛顿迭代法来精细调整这个解,以达到更高的精度。牛顿

迭代法是一种在数值分析中广泛使用的根求解方法,其利用函数的导数信息来快速找到函数零点<sup>[12]</sup>。用于迭代地改进平台位置和姿态的估计值,直至达到所需的精度。

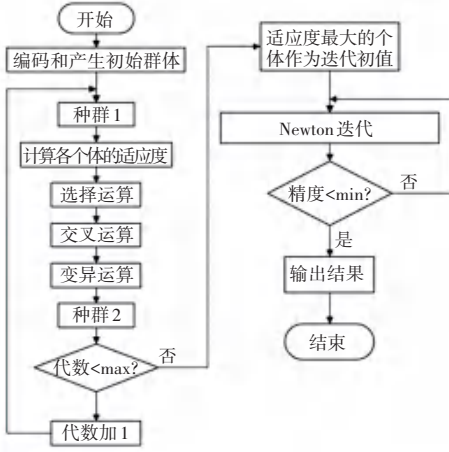


图 3 遗传算法与牛顿迭代法结合流程图

Fig. 3 Flowchart of the combination of genetic algorithm and Newton's iteration method

## 2.2 基于遗传算法(GA)的 Stewart 平台正解分析

本研究中,使用遗传算法(GA)解决 Stewart 平台正解问题。通过构建的遗传算法流程(见图 4),验证了其在处理复杂非线性优化问题上的有效性<sup>[13]</sup>。进行了 100 代迭代,种群规模为 500,交叉率为 0.6,变异率为 0.05。每个个体由 6 个变量组成,关联平台的空间位置和姿态。适应度函数  $fun(x)$  评估个体与预期位置及姿态的偏差。通过选择、交叉和变异等遗传操作,种群不断朝向最优解演化<sup>[14]</sup>。图 5 显示了算法的平均适应度和最佳适应度随迭代次数增加而下降,证明了算法的有效收敛。

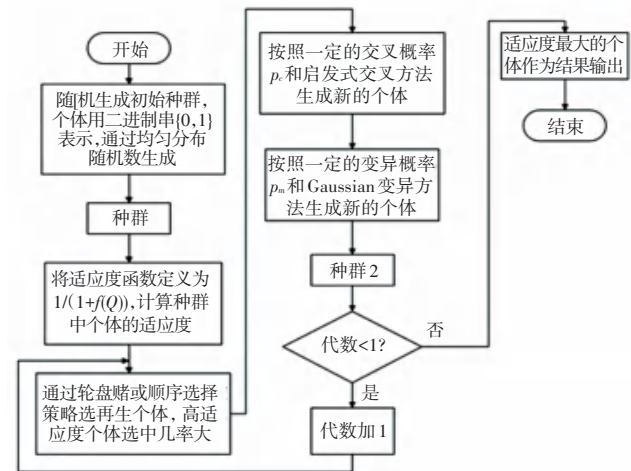


图 4 遗传算法(GA)流程图

Fig. 4 Flowchart of the genetic algorithm (GA)

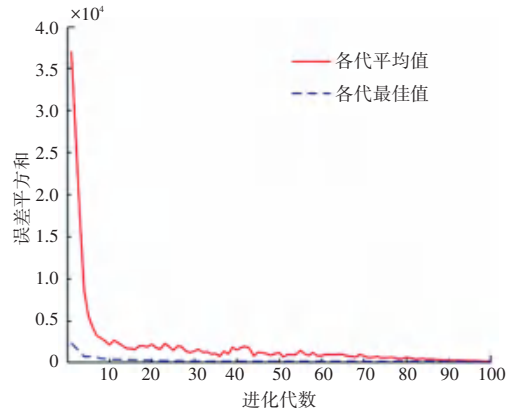


图 5 遗传算法迭代曲线

Fig. 5 Iteration curve of the genetic algorithm

## 2.3 基于牛顿迭代法的 Stewart 平台正解分析

在 Stewart 平台正解的计算中,牛顿迭代法是一种高效的数值方法,用于求解非线性方程组。动平台上的点在定平台坐标系中的坐标如下:

$$[U_i]_o = [r]_o + D[x_{ui}, y_{ui}, z_{ui}]^T \quad (5)$$

由六自由度并联运动平台的反解可知:

$$(x_{ui} - x_{di})^2 + (y_{ui} - y_{di})^2 + (z_{ui} - z_{di})^2 = l_i^2 \quad (6)$$

从而并联平台的正解转化为求解一个含有 6 个未知量的非线性方程组,即:

$$f_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x_{ui} - x_{di})^2 + (y_{ui} - y_{di})^2 + (z_{ui} - z_{di})^2 - l_i^2 = 0 \quad (7)$$

在公式(5)~(7)中,  $x_{ui}, y_{ui}, z_{ui} (i = 1, 2, \dots, 6)$  代表动平台 6 个顶点在固定平台坐标系中的坐标。同样地,  $x_{di}, y_{di}, z_{di} (i = 1, 2, \dots, 6)$  分别对应固定平台上 6 个顶点的坐标。而  $l_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  指的是连接动平台和固定平台相对应顶点的 6 个液压缸的长度。

对于公式(6)中的非线性方程组,以  $f_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  的形式,并在初始迭代值  $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  的邻域进行二元泰勒展开<sup>[15]</sup>。在此过程中截取至一阶导数项,从而获得近似表达式如下:

$$\begin{aligned} f_1(Q_0) + \sum_{i=1}^6 (q_i - q_{i0}) \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial q_i} &= 0 \\ f_2(Q_0) + \sum_{i=1}^6 (q_i - q_{i0}) \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial q_i} &= 0 \\ &\vdots \\ f_6(Q_0) + \sum_{i=1}^6 (q_i - q_{i0}) \frac{\partial f_6(Q_0)}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)即为关于  $\Delta q_i = q_i - q_{i0} (i = 1, 2, \dots, 6)$  的线性方程组,即:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial q_i} \Delta q_i = -f_1(Q_0) \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial q_i} \Delta q_i = -f_2(Q_0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_6(Q_0)}{\partial q_i} \Delta q_i = -f_6(Q_0) \end{cases} \quad (9)$$

则该线性方程组中对于  $\Delta q_i$  的系数矩阵如下式,当该系数矩阵对应的行列式不为 0 时,该线性方程组有唯一解,可解得  $\Delta q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )。

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial q_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6(Q_0)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6(Q_0)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_6(Q_0)}{\partial q_6} \end{bmatrix} \quad (10)$$

从给定的初始迭代值可以看出： $Q_0 = [q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40}, q_{50}, q_{60}] = [x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0]$ ,  $Q_1 = Q_0 + [\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta q_4, \Delta q_5, \Delta q_6]$ 。因此,  $Q_1$  可以成为下一轮泰勒展开的新起点。通过不断重复这一过程,直至所有变化量的最大值小于预设的精度阈值  $\varepsilon$ , 此时得到的  $Q_n$  即认为是六自由度运动平台的位置解<sup>[16]</sup>。

2.4 基于 GA-Newton 迭代正解算法的逆解验证

设 Stewart 平台 6 根驱动杆的杆长值分别为  $|q_1| = 200.0 \text{ mm}$ 、 $|q_2| = 250.0 \text{ mm}$ 、 $|q_3| =$

$220.0 \text{ mm}$ 、 $|q_4| = 230.0 \text{ mm}$ 、 $|q_5| = 200.0 \text{ mm}$ 、 $|q_6| = 210.0 \text{ mm}$ , 上下平台每铰链点的坐标参数见表 1, 单位为 mm。

表 1 上下平台每铰链点的坐标参数

Table 1 Coordinate parameters of each hinge point on the upper and lower platforms /mm

|     | $A_1$   | $A_2$  | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$  | $A_6$ |
|-----|---------|--------|-------|-------|--------|-------|
| X 轴 | -106.30 | -46.3  | -3.8  | 123.7 | 110.1  | -77.4 |
| Y 轴 | -65.88  | 116.1  | 125.0 | -18.0 | -59.2  | -98.2 |
|     | $B_1$   | $B_2$  | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$  | $B_6$ |
| X 轴 | -164.20 | -147.2 | 120.2 | 147.2 | 44.0   | 0     |
| Y 轴 | 44      | 85.0   | 120.2 | 85    | -164.2 | -170  |

逆解验证部分旨在验证基于 GA-Newton 迭代正解算法获得的 Stewart 平台位置和姿态的准确性。通过 Newton\_raphson 函数获得平台的运动学正解,包括空间位置 ( $x, y, z$ ) 和姿态角度 ( $\alpha, \beta, \gamma$ )。利用姿态矩阵,将动态平台铰链的位置转换到静态坐标系中,计算出静态和动态铰链之间的距离 (即 6 个液压缸的长度  $q_1 \sim q_6$ )<sup>[17]</sup>。

为验证算法的可靠性,对一组特定的杆长值进行了 6 次重复计算,每次独立运行 GA-Newton 迭代算法,以确保一致性和准确性。表 2 展示了 6 次计算的结果,包括 Stewart 平台正解的空间位置和姿态角度 ( $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ ), 以及逆解验证得到的新杆长参数 ( $q_1', q_2', q_3', q_4', q_5', q_6'$ ), 误差平方和的最小值 ( $W$ ) 和程序运行时间 ( $T$ )。结果的一致性和准确性表明算法在单次计算中的稳定性和良好的重复性。

表 2 Stewart 平台正解结果记录

Table 2 Record of the forward kinematics solution for the Stewart platform

|                  | 第一组         | 第二组         | 第三组         | 第四组         | 第五组         | 第六组         |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $x/\text{mm}$    | 11.414 440  | 11.416 607  | 11.415 462  | 11.416 044  | 11.411 145  | 11.421 480  |
| $y/\text{mm}$    | -4.642 642  | -4.637 761  | -4.641 319  | -4.638 973  | -4.637 577  | -4.638 040  |
| $z/\text{mm}$    | 184.162 656 | 184.162 020 | 184.162 014 | 184.162 368 | 184.165 749 | 184.160 087 |
| $\alpha/(\circ)$ | 9.336 472   | 9.337 972   | 9.338 233   | 9.338 222   | 9.337 697   | 9.338 981   |
| $\beta/(\circ)$  | -0.616 132  | -0.616 617  | -0.616 659  | -0.616 734  | -0.616 219  | -0.616 827  |
| $\gamma/(\circ)$ | -14.764 748 | -14.764 965 | -14.763 812 | -14.764 777 | -14.758 589 | -14.764 333 |
| $q_1'/\text{mm}$ | 200.002 657 | 199.998 145 | 200.000 198 | 199.998 559 | 200.007 348 | 199.997 274 |
| $q_2'/\text{mm}$ | 249.997 915 | 250.001 435 | 249.999 215 | 250.001 282 | 249.993 239 | 250.003 180 |
| $q_3'/\text{mm}$ | 219.998 259 | 219.999 704 | 220.001 613 | 220.000 923 | 220.009 474 | 219.998 678 |
| $q_4'/\text{mm}$ | 230.001 415 | 229.998 476 | 229.999 232 | 229.999 421 | 229.993 015 | 229.995 940 |
| $q_5'/\text{mm}$ | 199.999 238 | 200.000 528 | 199.999 903 | 200.000 402 | 200.008 407 | 200.000 353 |
| $q_6'/\text{mm}$ | 210.003 649 | 210.002 140 | 209.999 190 | 210.001 422 | 210.000 057 | 209.996 078 |
| $W$              | 0.000 030   | 0.000 013   | 0.000 005   | 0.000 007   | 0.000 309   | 0.000 051   |
| $T/\text{s}$     | 2.789 438   | 2.808 760   | 2.838 506   | 2.662 389   | 2.584 249   | 2.660 367   |



图 6 为求解后可视化平台的静态和动态坐标系、连杆的布局以及铰链位置,更加清晰和直观地显示了算法的验证过程。从以上图表可以看出,平台的位置坐标  $x, y, z$  以及姿态角度  $\alpha, \beta, \gamma$  在各次计算中保持了极高的一致性,特别在杆长参数  $q_1'$  至  $q_6'$  的求解中,算

法几乎达到了理论预设值,误差的均方根(RMSE)极低,平均在  $7.95 \times 10^{-4}$  到  $1.95 \times 10^{-4}$  的范围内,显示出算法优异的精确度。算法的运行时间( $T/s$ )也显示出较好的效率,平均运行时间约为  $2.7 \sim 2.8$  s,为在实际工程应用中进行快速优化提供了可能。

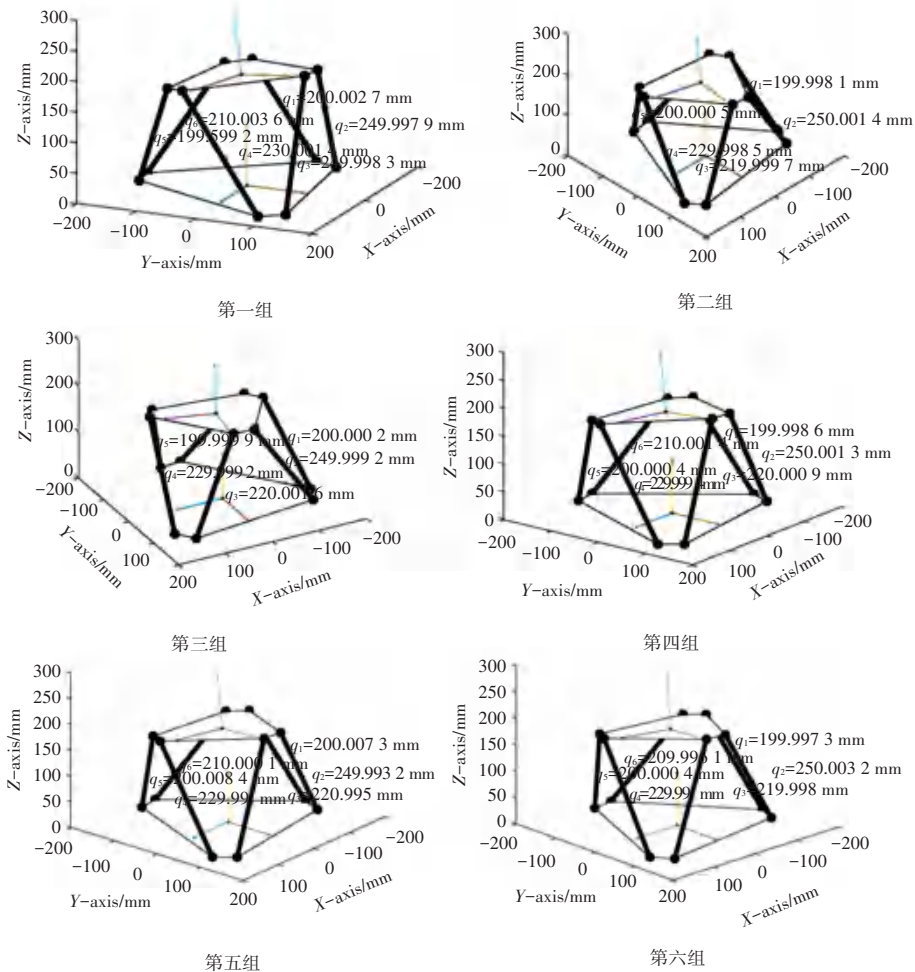


图 6 求解后平台参数可视化图  
Fig. 6 Visualization of solved platform parameters

3 工作空间分析

3.1 工作空间的定义

Stewart 型六自由度平台的工作空间,是指该平台的动平台能够达到的所有位置和姿态的集合。这种平台由 6 个可伸缩的连杆连接静态基座和动态平台,允许动平台在三维空间中进行 6 种基本运动:上下(升降)、前后(俯仰)、左右(横滚)、以及 3 个维度的平移<sup>[18]</sup>。工作空间的界定不仅基于连杆的长度和角度限制,还受到连杆间干涉、机械结构强度和稳定性等因素的制约。

3.2 工作空间约束条件

六自由度并联平台的工作空间,主要有 3 个影

响因素:电动缸的长度限制、虎克铰/球铰转动角度的限制及电动缸间的干涉<sup>[19]</sup>。

3.2.1 电动缸长度限制

设定  $L_{imin}$  为第  $i$  根电动缸的最短长度,  $L_{imax}$  为第  $i$  根电动缸的最长长度,运动过程中电动缸长度为  $|L_i|$ ,则连杆约束为:

$$L_{imin} \leq |L_i| \leq L_{imax} \tag{11}$$

3.2.2 虎克铰/球铰转动角度的限制

在 Stewart 平台的设计和分析中,虎克铰和球铰转动角度的限制是至关重要的因素,其直接影响到整个平台的运动范围和灵活性。虎克铰/球铰的转角范围限制在加工过程中就已经确定,其虎克铰转角范围可表示为:

$$\theta_i \leq \theta_{imax}, i = 1, 2 \tag{12}$$

球铰转角范围为:

$$\theta_i \leq \theta_{imax}, i = 1, 2, 3 \tag{13}$$

虎克铰与球铰的运动范围限制决定了电动缸的方向矢量与静平台、动平台的夹角范围,下面对静平台及动平台的法向量与电动缸的方向矢量进行探讨。

用  $\theta_{ai}$ 、 $\theta_{bi}$  分别表示静平台和动平台的法向量与电动缸连杆矢量的夹角;  $L_i$ 、 $|L_i|$  分别表示电动缸连杆矢量和电动缸的长度; 向量  $na_i$  表示在坐标系  $O_a - X_a Y_a Z_a$  中静平台的法向量,  $nb_i$  表示在坐标系  $O_b - X_b Y_b Z_b$  中运动平台的法向量;  ${}^A R_B$  表示动平台相对于静平台的姿态变换矩阵; 给定静、动平台的法向量与电动缸矢量夹角范围的最大值分别为:  $\theta_{amax}$ 、 $\theta_{bmax}$ 。

由上述分析可知静平台限制为:

$$\theta_{ai} = \arccos \frac{L_i \cdot n_{ai}}{|L_i|} \leq \theta_{amax} \tag{14}$$

动平台限制:

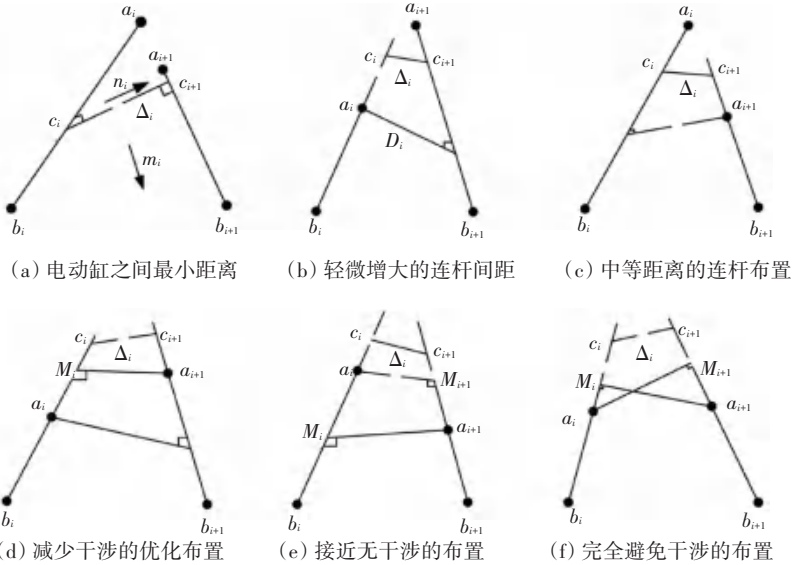


图 7 电动缸间 6 种分类形式  
Fig. 7 Six classification types of electric cylinders

为了解决这一问题,本研究采用了遗传算法来寻找两条有限长连杆之间的最短距离。首先,使用遗传算法确定了参数 t1 到 t6,参数表示在每条连杆上寻找特定点的比例位置;然后,基于这些参数和连杆的方向矢量,计算出在静平台上对应点的位置<sup>[20]</sup>;接着计算相邻连杆之间的距离,判断是否存在连杆间的干涉。通过这种方法能够确保 Stewart 平台在运动时连杆间不会产生干涉,从而保证整个

$$\theta_{bi} = \arccos \frac{L_i \cdot ({}^A R_B n_{bi})}{|L_i|} \leq \theta_{bmax} \tag{15}$$

### 3.2.3 电动缸间连杆的干涉

在 Stewart 平台运动过程中,可能会出现电动缸与电动缸之间,电动缸与平台间的干涉问题。假定每一根电动缸都是标准的圆柱体,其中  $D$  为电动缸的直径,  $D_i$  为相邻电动缸中心轴线间的距离(相邻电动缸最易出现干涉),则约束条件可表示如下:

$$D < D_i, i = 1, 2, \dots, 6 \tag{16}$$

干涉问题的关键在于确定相邻电动缸(或连杆)之间的最短距离,确保其不会在运动过程中相互碰撞。在传统的方法中,通常涉及建立复杂的数学模型,6 种不同的分类形式如图 7 所示。图中 6 图(a 到 f)展示了不同连杆(电动缸)之间的干涉风险:图(a)和(b)中,连杆之间距离最小,干涉风险较高;图(c)和(d)中,连杆之间的距离增大,干涉风险有所降低;图(e)和(f)中,连杆之间的距离最大,几乎没有干涉风险。

平台的稳定性和可靠性。

### 3.3 工作空间可视化分析

#### 3.3.1 给定系统参数

本文探讨的 Stewart 平台铰链点在静态和动态坐标系中的具体位置见表 3 和表 4,数据反映了平台的结构特性,关键用于理解和分析其工作空间。

静平台铰链位置相对于固定坐标系的坐标值定义为  $A_{a1}$  至  $A_{a6}$ ,以毫米为单位,覆盖了静平台上 6 个

铰链点的位置<sup>[21]</sup>。同样,动平台铰链位置相对于移动坐标系的坐标值用  $B_{b1}$  至  $B_{b6}$  表示。这些坐标点为编程和计算提供了基础,直接描述了 Stewart 平台的结构。

本文探讨了这些铰链点位置的推导方法。通常情况下,Stewart 平台的铰链点对称分布,上下平台均呈圆形或正六边形布局。本文提供了一套 Stewart 平台的尺寸参数和铰链点的角度分布,以相应的坐标系为基础。这不仅使铰链点位置的确定更准确,也为平台的运动学分析和工作空间的可视化提供了坚实的理论基础。

表 3 Stewart 平台尺寸参数

| 内容  | 平台半径/mm | 连接点个数 | 支腿初始长度/mm |
|-----|---------|-------|-----------|
| 动平台 | 200     | 6 点对称 | 210       |
| 静平台 | 281     | 6 点对称 | 210       |

表 4 Stewart 平台支腿连接点位置参数

| 连接点位置 | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|-------|-----|------|------|------|------|------|
| 动平台   | 49° | 71°  | 169° | 191° | 289° | 311° |
| 静平台   | 11° | 109° | 131° | 229° | 251° | 349° |

6 个铰链点的位置表达式为:

$$\text{Position:} \begin{cases} x' = r' \times \cos \alpha' \\ y' = r' \times \sin \alpha' \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $x'$ 、 $y'$  分别表示铰链点在对应坐标系的坐标,  $r'$  为圆或外接圆的半径,  $\alpha'$  为铰链点与圆心的连线与  $X$  轴的夹角。

本文选择柱坐标系进行工作空间边界的计算,初始化欧拉角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为 0,专注于平台位置变化,简化计算。为绘制工作空间边界,定义了一个数组 surface 保存最外层面的坐标。设定平台法向量与连杆矢量的最大夹角  $\theta_{a\max}$  和  $\theta_{b\max}$  为 60°,杆件直径  $D$  为 4 mm。搜索工作空间时,对半径  $r$  (0~200 mm)、角度  $\theta$  (0~360°) 和高度  $z$  (单位为 mm) 进行迭代,将柱坐标转换为直角坐标进行分析。

姿态矩阵  $A\_R\_B$  基于欧拉角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ , 用于描述动平台相对于静平台的姿态变换,通过该矩阵计算动平台铰链点在基坐标系中的位置,并求解电动缸的长度<sup>[22]</sup>。

### 3.3.2 工作空间绘制

在 Stewart 平台设计研究中,3.2 节所述的 3 个约束条件共同确定了平台的工作空间及其边界。为可视化工作空间,采用了综合判断和绘图方法:

利用遗传算法计算相邻连杆间的最小距离,在每次迭代中,检查每对相邻连杆之间的最短距离是否大于连杆直径 ( $D_i > D$ )。如果所有连杆对的最小距离均大于连杆直径,该位置则为平台可行的工作区域。利用 surface 数组中的数据生成三维散点图(如图 8 所示),再将这些点转换成三维曲面(如图 9 所示),清晰显示 Stewart 平台的工作空间外包络面。

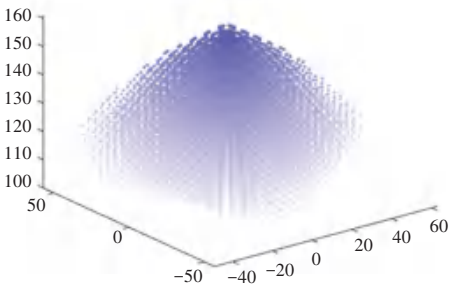


图 8 三维散点图  
Fig. 8 3D scatter plot

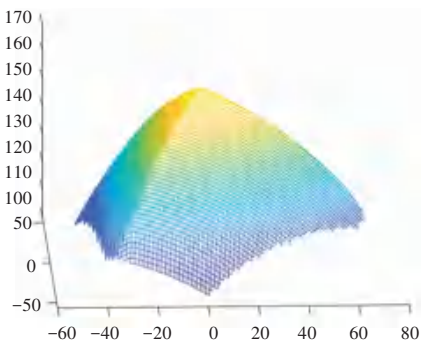


图 9 Stewart 平台工作空间图  
Fig. 9 Workspace diagram of the Stewart platform

## 4 结束语

本研究深入探讨了 Stewart 型六自由度平台的运动学正解及其工作空间特性,通过理论与数值分析,加深了对其运动学特性与工作空间的理解,为并联机构控制系统的设计与实际应用提供了参考。

在运动学正解研究方面,采用了结合遗传算法和牛顿迭代法的创新方法,有效克服了传统技术在初始值设定和多解性处理上的局限,提高了求解精度与效率。验证了该方法的有效性与可靠性,为平台的精确控制及性能优化奠定了理论基础。

在工作空间分析方面,综合考量了电动缸长度限制、铰链转动角度限制和电动缸间干涉等因素,成功构建了 Stewart 平台的工作空间外包络面模型。这项分析揭示了平台的运动边界与性能限制,为平台的设计改进与功能优化提供了重要的理论依据。

参考文献

[1] 陈飞, 陈机林, 候远龙. 一种新型六自由度并联机器人设计[J]. 机床与液压, 2023, 51(21):38-42.

[2] 任建华, 王键, 冯泽民. 基于 Matlab 的 8R 机械臂运动学分析与仿真[J]. 制造技术与机床, 2024, 744(6):37-43.

[3] ANDRIEVSKY B, KUZNETSOV N V, KUDRYASHOVA E V, et al. Signal - parametric discrete - time adaptive controller for pneumatically actuated Stewart platform[J]. Control Engineering Practice, 2023(138): 105616.

[4] 郭冲冲, 武文华, 吴国东, 等. 海洋核动力平台定位系统多体动力学模型试验验证[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2024, 45(7): 1251-1257.

[5] 万琴, 宁顺兴, 李智, 等. 6DOF 机械臂运动学分析与轨迹规划仿真[J]. 制造业自动化, 2024, 46(4): 42-47.

[6] 曾波, 吴钦木, 郑飞. 六自由度机械臂轨迹规划研究与仿真[J]. 智能计算机与应用, 2020, 10(11): 65-69.

[7] FAJARDO J, MELO D F L. Towards a modular pathological tremor simulation system based on the stewart platform [J]. Sensors, 2023, 23(22):9020.

[8] FARZIN F, MOGHADDAM S S, EHTESHAMI M. Auto-tuning data - driven model for biogas yield prediction from anaerobic digestion of sewage sludge at the south - tehran wastewater treatment plant: Feature selection and hyperparameter population-based optimization[J]. Renewable Energy, 2024(227): 120554.

[9] 李鸽, 李宇, 瓮松峰, 等. 重载六自由度混联调姿平台设计与仿真[J]. 机械科学与技术, 2024, 43(10):1647-1653.

[10] 董林威, 高宏力, 潘江. 六自由度并联平台的鲁棒自适应 PD 控制算法[J]. 计算机仿真, 2023, 40(6): 307-311.

[11] SUN X, GUO S, DU B, et al. A Pareto-based hybrid genetic simulated annealing algorithm for multi - objective hybrid production line balancing problem considering disassembly and assembly[J]. International Journal of Production Research, 2024, 62(13): 4809-4830.

[12] 吴镛, 陈丰, 曹波, 等. 改进遗传算法优化的温室移动机器人单目相机标定[J]. 安徽科技学院学报, 2024, 38(3): 78-86.

[13] 邹春玲, 熊静, 刘超, 等. 基于遗传算法优化 BP 神经网络的飞机油耗预测方法[J]. 智能计算机与应用, 2023, 13(3): 226-230.

[14] 赵越, 李言锋. 基于遗传算法的无人机农药喷洒航迹规划[J]. 智能计算机与应用, 2023, 13(8):88-93.

[15] ZHANG R, ZHANG S, WEN X, et al. Optimization of short-term hydropower scheduling with dynamic reservoir capacity based on improved genetic algorithm and parallel computing[J]. Journal of Hydrology, 2024(636): 131238.

[16] 杨锦涛, 赵春香, 杨成福. 基于遗传算法求解 TSP 问题的研究及 Matlab 实现[J]. 智能计算机与应用, 2023, 13(7): 58-63.

[17] 刘洋, 江涛. 计及安装角的六自由度平台虎克铰干涉计算模型[J]. 吉林大学学报(工学版), 2024, 54(6):1519-1527.

[18] 曹正, 步斌, 尹子涵, 等. 焊接机器人的工作空间分析与运动学仿真分析[J]. 中国高新科技, 2024(6): 97-98.

[19] 陶广宏, 耿世雄, 赵嘉琪, 等. 模块化机器人结构设计及运动特性分析[J]. 机床与液压, 2024, 52(5): 45-52.

[20] 杨永鲲, 钟文楣, 韩金孝. 焊接机器人的工作空间分析与运动学仿真[J]. 机械工程师, 2023(6): 79-81.

[21] 陈修龙, 张昊, 田润洲, 等. 六自由度搬运机械手实验平台设计与仿真分析[J]. 实验室科学, 2024, 27(1): 6-11.

[22] 陈伟杰, 陈文波. 2UPR/UPS/UP 并联机器人的工作空间及承载能力优化设计[J]. 智能计算机与应用, 2022, 12(11): 142-147.